$$\Rightarrow 0 \leq v_n \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$\rightarrow 0 \leq v_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\begin{cases} * \ v_n \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \text{ est croissante d'où} \end{cases}$$

(v_n) est convergente

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to +\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$$

2) $\omega_n = \int_1^n \frac{t}{h(t)}\,dt \ ; \ n \geq 1$

a)

$$(1 + Lnt) - \left(\frac{t}{t - Lnt}\right)$$

$$= \frac{tLnt - Lnt - (Lnt)^2}{h(t)}$$

$$= \frac{Lnt(t - 1 - Lnt)}{h(t)} = \frac{Lnt(h(t) - 1)}{h(t)} \geq 0$$

Car $t \geq 1$ et $h(t) \geq 1$ d'où

$$\frac{t}{t - Lnt} \leq 1 + Lnt \ ; \ \forall t \in [1, +\infty[$$

b) $$\int_1^n (1 + \frac{Lnt}{t})\,dt = \left[t + \frac{1}{2}(Lnt)^2\right]_1^n$$

$$= n - 1 + \frac{1}{2}(Ln(n))^2$$

c) pour $t \geq 1$

$$\frac{t}{t - Lnt} = \frac{(t - Lnt) + Lnt}{t - Lnt}$$

$$= 1 + \frac{Lnt}{t - Lnt} \geq 1 + \frac{Lnt}{t} \quad \text{car } Lnt \geq 0$$

D'où

$$\int_1^n \left(\frac{t}{t - Lnt}\right) dt \geq \int_1^n (1 + \frac{Lnt}{t})\,dt$$

$$\Rightarrow \omega_n \geq n - 1 + \frac{1}{2}(Ln(n))^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} n - 1 + \frac{1}{2}(Ln(n))^2 = +\infty$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \omega_n = +\infty$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn